KEPUTUSAN MENGHADAPI KETIDAKPASTIAN

(DECISION UNDER UNCERTAINTY)

Sutrisno

Untuk masalah pengambilan keputusan menghadapi ketidakpastian ada beberapa kriteria yang biasa digunakan, yakni:

1. **Kriteria Laplace**
2. **Kriteria Minimax (Maximin)**
3. **Kriteria Savage**
4. **Kriteria Hurwicz**

- Beda utama direfleksikan oleh sifat konservatif dari pengambil keputusan.
- Laplace lebih optimistik dari minimax. Hurwicz dapat disesuaikan bagi yang optimistik maupun pesimistik.
- Pada masalah-masalah ini, "lawan" dianggap tidak intelijen/pintar. Dalam hal "lawan" juga punya intelijensia → *GAME THEORY*
- Pada metode ini, informasi disimpulkan dalam bentuk matriks :
  - Baris : Aksi/Tindakan
  - Kolom : *State* yang akan dicapai

Aksi/tindakan → kemungkinan keputusan

a_i = Tindakan ke-i ($i = 1, 2, \ldots, m$)

θ_j = *State* yang akan dihasilkan ($j = 1, 2, \ldots, n$)

$v(a_i, \theta_j)$ = fungsi kontinu a_i dan θ_j

↓

value

↓

boleh juga F

	θ_1	θ_2	…	θ_n
a_1	$v(a_1, \theta_1)$	$v(a_1, \theta_2)$	…	$v(a_1, \theta_n)$
a_2	$v(a_2, \theta_1)$	$v(a_2, \theta_2)$	:	$v(a_2, \theta_n)$
:	:	:	:	:
a_m	$v(a_{m1}, \theta_1)$	$v(a_{m1}, \theta_2)$	…	$v(a_{m1}, \theta_n)$

1. Kriteria Laplace

- **Dasar**: Prinsip Kekurangan Alasan (*Principle Of Insufficient Reason*)
- **Metode:**

Pilih a_i *yang memenuhi* :

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v\,(a_i\,,\ \theta_j) \right\}$$

Dimana : *1/n* adalah probabilitas bahwa θ_j (j = 1, 2, ... , n) terjadi.

Contoh:

Sebuah fasilitas rekreasi harus menentukan level supplai daging yang dibutuhkan pada suatu masa liburan. Kemungkinan pengunjung yang akan datang adalah 200, 250, 300, atau 350 orang. Empat level supplai dipertimbangkan untuk masing-masing level pengunjung itu. Penyimpangan dari level ini akan mengakibatkan tambahan biaya, baik berupa biaya tambahan gudang, maupun biaya karena *demand* tak terpenuhi.

Biaya tersebut adalah seperti pada tabel berikut :

KATEGORI PENGUNJUNG

		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
LEVEL SUPLAI	a_1	5	10	18	25
	a_2	8	7	8	23
	a_3	21	18	12	21
	a_4	30	22	19	15

Prinsip Laplace adalah bahwa θ_1, θ_2, θ_3, dan θ_4 mempunyai peluang yang sama (*equally likely*) untuk terjadi.

$$P\{\theta = \theta_j\} = 1/4 \text{ untuk } j = 1,2,3,4$$

Maka, taksiran biaya untuk a_1, a_2, a_3, a_4 adalah:

$E\{a_1\} = \frac{1}{4}\,(5 + 10 + 18 + 25) = 14{,}5$

$E\{a_2\} = \frac{1}{4}\,(8 + 7 + 8 + 23) = 11{,}5$ ⇐

$E\{a_3\} = \frac{1}{4}\,(21 + 18 + 12 + 21) = 18{,}0$

$E\{a_4\} = \frac{1}{4}\,(30 + 22 + 19 + 15) = 21{,}5$

→ Biaya terendah adalah a_2 (level persediaan a_2).

2. Kriteria Minimax

- **Paling konservatif → memilih yang terbaik dari yang terburuk.**
- **Bila $v(a_i, \theta_j)$ merupakan kerugian bagi pengambil keputusan, maka kemungkinan kerugian terbesar adalah :**

$$\max_{\theta_j} \left\{ v\,(a_i, \theta_j) \right\}$$

Kriteria minimax memilih tindakan a_i yang akan:

$$\min_{a_i} \max_{\theta_j} \left\{ v(a_i, \theta_j) \right\} \Longrightarrow \textbf{MINIMAX}$$

Bila $v(a_i, \theta_j)$ adalah keuntungan, maka kriteria memilih tindakan a_i, adalah :

$$\max_{a_i} \min_{\theta_j} \left\{ v(a_i, \theta_j) \right\} \Longrightarrow \textbf{MAXIMIN}$$

Kerugian maximum

$$\max_{\theta_j} \left\{ v(a_i, \theta_j) \right\}$$

$v(a_i, \theta_j)$		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\max_{\theta_j} \{v(a_i, \theta_j)\}$	
	a_1	5	10	18	25	25	
	a_2	8	7	8	23	23	
	a_3	21	18	12	21	21	→ MINIMAX
	a_4	30	22	19	15	30	

yg paling minimum

$\therefore$ **Tindakan terbaik → a_3**

berbeda dgn Maximin

Rugi	Laba / Prestasi
Minimax	Maximin
25	5
23	7
21 → min	12
30	15 → Max

3. Kriteria Penyesalan Minimax Savage

(*Savage Minimax Regret Criterion*)

Kriteria minimax bersifat sangat konservatif, sehingga kadang-kadang dapat memberi hasil yang *illogical* (tak logis).

Contoh:

$$v(a_2, \theta_2) = \begin{array}{cccc} & \theta_1 & \theta_2 & \max\limits_{\theta_j} \{v(a_i, \theta_j)\} \\ a_1 & 11000 & 90 & 11000 \\ a_2 & 10000 & 10000 & 10000 \end{array} \rightarrow \text{MINIMAX}$$

-10000

min 10000 mk

Dengan kriteria minimax, solusi adalah a_2, padahal secara intuisi saja kita dapat memilih a_1 karena ada kemungkinan jika $\theta_1 = \theta_2$ maka biaya cuma 90, sementara pilihan a_2 pasti menghasilkan biaya 10.000.

Savage memperbaiki hal ini dengan menghitung $r(a_i, \theta_j)$:

range

$$
r(a_i, \theta j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k} \left\{ v(a_k, \theta_j) \right\} - v(a_i, \theta_j) & \text{bila } v \text{ adalah laba} \\ v(a_i, \theta_j) - \min\limits_{a_k} v\left\{ a_k, \theta_j \right\} & \text{bila } v \text{ adalah biaya} \end{cases}
$$

Contoh:

$r(a_i,\theta_j) =$	θ_1	θ_2	$\max\limits_{\theta_j} \{ r(a_i, \theta_j) \}$	
a_1	1000	0	1000	→ MINIMAX
a_2	0	9910	9910	

Contoh:

$v(a_i, \theta_j)$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	5 -5	10 -7	18	25
a_2	8 -5	7 -7	8	23
a_3	21 -5	18 -7	12	21
a_4	30 -5	22 -7	19	15

$r(a_i, \theta_j)$

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\max\limits_{\theta_j} \{ r(a_i, \theta_j) \}$	
a_1	0	3	10	10	10	penyesalan paling besar
a_2	3	0	0	8	8	$\Rightarrow$ minimax
a_3	16	11	4	6	16	
a_4	25	15	11	0	25	

Dari hasil ini terlihat bahwa pilihan terbaik adalah a_2.

4. Kriteria Hurwicz

Kriteria ini dapat digunakan oleh yang paling optimistik maupun yang paling pesimistik.

Bagi yang optimistik dapat memilih tindakan yang akan menghasilkan

$$\max_{a_i} \max_{\theta_j} \left\{ \nu(a_i, \theta_j) \right\}$$

(dalam hal ini $\nu(a_i, \theta_j)$ adalah laba).

Begitu pula, dalam kondisi yang sangat pesimistik, tindakan yang dipilih berupa:

$$\max_{a_i} \min_{\theta_j} \left\{ v\ (a_i\ ,\ \theta_j) \right\}$$

(dalam hal ini v $(a_i\ ,\ \theta_j)$ adalah biaya).

Kriteria Hurwicz memberikan keseimbangan itu dengan memberi bobot α dan $(1-\alpha)$ yang harganya adalah $0 \leq \alpha \leq 1$.

(*)

Jadi, jika v $(a_i\ ,\ \theta_j)$ menyatakan laba, pilih tindakan yang menghasilkan :

$$\max_{a_i} \left[(\alpha) \max_{\theta_j} \left\{ v\,(a_i\ ,\ \theta_j) \right\} + (1-\alpha) \min_{\theta_j} v \left\{ a_i\ ,\ \theta_j\ ) \right\} \right]$$ → optimistik

α dikalikan dgn semua θ paling max

Untuk kasus $v(a_i,\theta_j)$ menyatakan biaya, kriteria memilih tindakan yang akan menghasilkan :

$$\min_{a_i} \left[(\alpha) \min_{\theta_j} \left\{ v\,(a_i\ ,\ \theta_j) \right\} + (1-\alpha) \max_{\theta_j} v \left\{ a_i\ ,\ \theta_j\ ) \right\} \right]$$ → pesimistik

Parameter α disebut sebagai "Indeks Optimisme".

Bila $\alpha = 1 \rightarrow$ **terlalu optimistik**

$\alpha = 0 \rightarrow$ **terlalu pesimistik**

Contoh:

$v(a_i, \theta_j)$		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
	a_1	5	10	18	25
	a_2	8	7	8	23
	a_3	21	18	12	21
	a_4	30	22	19	15

Untuk $\alpha = ½$

	$\min_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j)$	$\max_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j)$	$(\alpha) \min_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j) + (1-\alpha) \max_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j)$
a_1	5	25	15
a_2	7	23	15
a_3	12	21	16,5
a_4	15	30	22,5

$\Rightarrow \min a_i$

Dari tabel ini terlihat bahwa tindakan terbaik yang harus diambil adalah a_1 atau a_2

$(5+25) \times \frac{1}{2} = 15$

lihat rumus *

DATA EKSPERIMENTAL UNTUK KEPUTUSAN MENGHADAPI RESIKO

Oleh

Darwin Sitompul

Bayes → Bayesian (org yg sering menggunakan rumus" bayes)

Prob. apriori

❖ ***Prior probabilities*** **: probabilitas yang telah diketahui berdasarkan pengalaman.** / historis

Ctt: – 80% perokok berat terkena kanker paru"
– mengambil komponen pd box yg berisi bagus, kita yakin pktam terambil 95% bagus

❖ ***Posterior probabilities*** **: probabilitas yang diperoleh dari eksperimen terbaru.**

Ctt: kita dtg ke RS dan menemui org terkena kanker paru". Berapa prob. ia ~~merokok~~ terkena kanker akibat merokok.

Misalkan :

teta

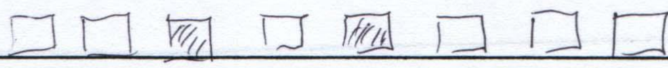
θ_1 = probabilitas tumpukan (*lot*) item yang bagus
θ_2 = probabilitas tumpukan (*lot*) item yang rusak

p $\{\theta = \theta_1\}$ = 0,95 dan p$\{\theta = \theta_2\}$ = 0,05 → prior

Setelah diambil sampel dan diperiksa (2 sampel), kemungkinan: → Pertanyaan posterior

lot

Z_1 : kedua item bagus
Z_2 : satu item bagus, satu item rusak
Z_3 : kedua item rusak



95% bagus
5% rusak

Sampel itu sendiri mungkin saja diambil dari tumpukan yang bagus, ataupun tumpukan yang rusak.

ambil 2 sampel dari lot yg jelek

→ given

p $\{Z_j \mid \theta_i\}$ → probabilitas kondisional
p $\{\theta_i\}$ → *prior probabilities*

Kelompok
→ pd kaum perokok
lorp prob. "Kena paru" 0,8
→ Ctg: lorp Kedua"nya bagus..

Posterior probabilities P$\{\theta_i \mid Zj\}$ → probabilitas mendapat item bagus (θ_1) atau rusak (θ_2) bila diketahui hasil Z_j dari eksperimen.

$\left.\begin{array}{l} P(\theta_1) \\ P(\theta_2) \end{array}\right\}$ apriori

Kondisional ↓

$P\{\theta_1 \mid z_1\}$	$P\{\theta_2 \mid z_1\}$	$P\{z_1 \mid \theta_1\}$
$P\{\theta_1 \mid z_2\}$	$P\{\theta_2 \mid z_2\}$	$P\{z_2 \mid \theta_1\}$
$P\{\theta_1 \mid z_3\}$	$P\{\theta_2 \mid z_3\}$	$P\{z_3 \mid \theta_1\}$

$$P\{Z_j\} = \sum_{i=1}^{m} P\{\theta_i, Z_j\} = \sum_{i=1}^{m} P\{z_j \mid \theta_i\}\, P\{\theta_i\}$$

dengan asumsi

$$\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_m$$

$$Z = Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$$

Probabilitas posterior:

kondisional

tpt ambil

apriori

posterior

$$P\{\theta_i \mid Z_j\} = \frac{P\{\theta_i, Z_j\}}{P\{Z_j\}} = \frac{P\{Z_j \mid \theta_i\}\, P\{\theta_i\}}{\sum_{i=1}^{m} P\{Z_j \mid \theta_i\}\, P\{\theta_i\}}$$

→ **probabilitas Bayes**

$P(\theta_1)$] apriori
$P(\theta_2)$

Contoh:

Misalkan persentase yang rusak dari tumpukan yang bagus adalah 4%, dan dari tumpukan yang rusak adalah 15%.

Besar sampel adalah 2 → distribusi binomial

prob. Conditional

$$P\{Z_1|\theta_1\} = C_2^2\ (0,96)^2\ (0,04)^0 = 0,922$$

$$P\{Z_2|\theta_1\} = C_1^2\ (0,96)^1\ (0,04)^1 = 0,0768$$

$$P\{Z_3|\theta_1\} = C_0^2\ (0,96)^0\ (0,04)^2 = 0,0016$$

$$P\{Z_1|\theta_2\} = C_2^2\ (0,85)^2\ (0,15)^0 = 0,7225$$

$$P\{Z_2|\theta_2\} = C_1^2\ (0,85)^1\ (0,15)^0 = 0,255$$

$$P\{Z_3|\theta_2\} = C_0^2\ (0,85)^0\ (0,15)^2 = 0,225$$

Catatan :

Distribusi Binomial : $P(x = r \mid n, p) = C_r^n\ P^r\ (1-p)^{n-r}$

r = 0,1,2,...,n

$Q = 1 - p$

$$C_r^n = \left(\begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right) = \frac{n\,!}{r\,!\,(n - r)\,!}$$

Probabilitas di atas dapat diringkaskan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

$P\{Z_j \mid \theta_i\} =$		Z_1	Z_2	Z_3
	θ_1	0,922	0,0768	0,0016
	θ_2	0,7225	0,255	0,0225

Dengan diketahuinya $p\{\theta = \theta_1\} = 0{,}95$ dan $p\{\theta = \theta_2\} = 0{,}05$, maka probabilitas gabungan (*joint probabilities*), yakni:

$$P\{\theta_i, Z_j\} = p\{Z_j \mid \theta_i\}\, p\{\theta_i\}$$

dapat dihitung dari tabel di atas dengan cara mengalikan baris pertama dengan 0,95 dan baris kedua dengan 0,05.

Diperoleh :

$P\{\theta_i, z_j\} =$		Z_1	Z_2	Z_3
	θ_1	0,8759	0,07296	0,00152
	θ_2	0,036125	0,01275	0,001125

Lalu, $p\{Z_j\}$ dapat dihitung dengan rumus :

$$P\{Z_j\} = \sum_{i=1}^{2} P\{\theta_i, Z_j\}$$

Rumus ini ekivalen dengan menjumlahkan kolom-kolom tabel di atas, diperoleh :

$p\{Z_1\} = 0,912025$; $p\{Z_2\} = 0,08571$; $p\{Z_3\} = 0,002645$

Akhirnya, diperoleh probabilitas posterior dengan menggunakan rumus :

$$P\{\theta_i \mid Z_j\} = \frac{P\{\theta_i, Z_j\}}{P\{Z_j\}}$$

Probabilitas ini dapat dihitung dengan cara membagi kolom tabel di atas dengan $p\{Z_j\}$ yang sesuai. Hasilnya adalah :

tpt ambil

		Z_1 (2 nya bagus)	Z_2 (1 jelek 1 bagus)	Z_3 (event 2 nya jelek)
$P\{\theta_1 \mid Z_j\}$ = (event)	θ_1	0,96039	0,85124	0,57467
	θ_2	0,03961	0,14876	0,42533

Catatan:
Menarik sekali untuk memperhatikan bagaimana probabilitas posterior ini dapat mempengaruhi keputusan akhir tergantung pada hasil Z_j dari pengujian. Bila kedua item yang diperiksa adalah bagus ($Z = Z_1$), maka probabilitas bahwa tumpukan (*lot*) merupakan tumpukan bagus adalah 0,96039. Jika keduanya rusak ($Z = Z_3$) maka hampir sama besar peluang bahwa lot tersebut bagus atau rusak. Hal ini membuktikan bahwa keputusan akhir dapat dipengaruhi oleh hasil Z_j.

dicoba

↑

Contoh:
Misalkan sebuah pabrik akan mengirim barang ke dua pelanggan, A dan B. Kontrak menyatakan bahwa persentase yang rusak untuk A tidak boleh lebih dari 5% dan untuk B tidak boleh lebih dari 8%. 9%
Bila persentase melebihi persyaratan maksimum, maka dendanya adalah $100 per persen kelebihan. Sebaliknya, untuk meningkatkan mutu barang yang dikirim, pabrik harus menambah biaya sebesar $80 → 90 **per kenaikan persentase. Andaikan sampel sebesar 2 diambil sebelum pengiriman, bagaimana pabrik harus mengambil keputusan?**

Solusi

Misalkan a_1 **= kirim ke A**
a_2 **= kirim ke B**

Misalkan pula :

θ_1 **= jenis dengan kerusakan 4%**
θ_2 **= jenis dengan kerusakan 15%**

yg harus dihitung besarnya denda dan kelebihan

Maka matriks biaya :

$$C(a, \theta) = \begin{array}{c|c|c} & \theta_1 & \theta_2 \\ \hline a_1 & \$80 & \$1000 \\ \hline a_2 & \$320 & \$700 \end{array}$$

4×80 7×100

A akan menerima barang tanpa denda bila kiriman hanya 5% yang rusak.

Kalau kerusakan adalah 4%, maka pabrik menanggung biaya sebesar:

(5-4) x \$80 = \$80 (kualitas lebih baik dari yang diperlukan).

Bila kiriman mempunyai 15% kerusakan, maka:

(15-5) x \$100 = \$1000 (denda)

Bila kiriman mempunyai 15% kerusakan, maka:

(15-5) x \$100 = \$1000 (denda)

$$E\{a_k \mid Z_j\} = \sum_{\theta_i} C(a_k, \theta_i) P\{\theta_i \mid Z_j\}$$

Kasus 1 : Z_1 (kedua sampel baik)

kirim ke A   n   Pn   n   Pn   Expected Cost

$E\{a_1 \mid z_1\}$ = (80)(0,96039) + (1000) (0,03961) = 116,44 → termurah.

kirim B

$E\{a_2 \mid z_1\}$ = (320) (0,96039) + (700) (0,03961) = 335,04

→ kirim ke A

Kasus 2: Z_2 (satu baik, satu rusak)

$E\{a_1| z_2\} = (80)(0,85124)+(1000)(0,14876)=216,86$

$E\{a_2| z_2\} = (320)(0,85124)+(700)(0,14876)=376,53$

→ kirim ke A

Kasus 3: Z_3 (keduanya rusak)

$E\{a_1| z_3\} = (80)(0,57467)+1000(0,42533)=471,30$

$E\{a_2| z_3\} = (320)(0,57467)+700(0,42533)=481,63$

→ kirim ke A