TEORI KEPUTUSAN
(DECISION THEORY)

- Semua model yang dipakai sebelum ini diselesaikan dengan asumsi tersedianya informasi lengkap atau informasi sempurna (*perfect information*).
- Pengambilan keputusan berdasarkan hal yang pasti (*decision making under certainty*)
- Misalnya:

Laba per unit diketahui	:	C_{ij}
Variabel keputusan	:	X_{ij}
Kontribusi Laba Total	:	$C_{ij}\,X_{ij}$

$$\text{Max } Z = C_{ij}\,X_{ij}$$

Bila informasi yang tersedia tidak lengkap atau tidak sempurna:

- Pengambilan keputusan dibawah ancaman resiko (*decision making under risk*).

  Melibatkan probabilitas

  Dinyatakan dengan fungsi probabilitas

- Pengambilan keputusan menghadapi ketidakpastian (*under uncertainty*)

  Fungsi probabilitas tidak dapat disediakan

Pasti/Tentu ⟵ Resiko ⟶ Tidak Pasti

Keputusan Menghadapi Resiko

Kriteria Dasar

- *Expected Value*
- Kombinasi *Expected Value* dan *Variance*
- Level Aspirasi
- *Most Likely Future*

Kriteria *Expected Value* (Nilai yang Diharapkan)

- Memaksimumkan *Expected* Laba
- Meminimumkan *Expected* Biaya

Kriteria ini dapat dinyatakan dalam bentuk uang atau utilitas.

Contoh:

Sebuah investasi sebesar \$20.000 kemungkinan akan menghasilkan laba bruto sebesar nol atau \$100.000 dengan probabilitas yang sama. Berdasarkan harga *expected* (*expected value*) dari uang, maka keuntungan netto yang dapat diharapkan (*expected net gain*) adalah:

$$(\$100.000 \times 0,5) + (0 \times 0,5) - \$20.000 = \$30.000$$

Bila hanya memperhatikan hasil ini, tentu saja investasi $20.000 itu adalah keputusan yang optimal. Namun, keputusan ini mungkin saja tidak dapat diterima oleh semua calon investor. Sebagai contoh, investor A mungkin saja berpendapat bahwa kehilangan $20.000 pada saat kesulitan likuiditas dapat mengakibatkan bangkrut. Tetapi, investor B yang kebetulan sedang mengalami surplus dana bisa saja menganggap bahwa peluang itu perlu diambil.

Hal ini sangat tergantung pada sikap (attitude) dari pengambil keputusan terhadap nilai atau utilitas uang.

Kondisi ini dapat lebih didramatisir dengan memperhatikan situasi investor A kembali. Misalkan bahwa investor A tidak ingin mengambil resiko akan kehilangan lebih dari $5.000 dalam kasus apapun. Misalkan pula A mempuyai dua alternatif:

- Menginvestasikan $20.000 dan mungkin akan memperoleh laba bruto $100.000 dengan probabilitas 0,5 atau $0 dengan probabilitas 0,5.
- Menginvestasikan $5.000 dan mungkin akan memperoleh laba bruto $23.000 dengan probabilitas 0,5 atau $0 dengan probabilitas 0,5.

Expected value dari pilihan I:

EV_1 = \$100.000 x 0,5 + \$0 x 0,5 – \$20.000 = \$30.000

Expected value dari pilihan II:

EV_2 = \$23.000 x 0,5 + 0 x 0,5 – \$5.000 = \$6.500

Oleh karena A bersikap tidak mau mengambil resiko kehilangan lebih dari 5.000 dollar, maka tidak ada pilihan lain bagi A kecuali mengambil alternatif kedua, meskipun expected laba dari alternatif kedua itu jauh lebih kecil dari alternatif I.

Kesimpulan:

- Utilitas tidaklah berbanding langsung dengan nilai uang aktual.
- Konsep utilitas tidak mudah untuk dikuantifikasi.
- Pada prakteknya, efek dari utilitas dapat dinyatakan dalam bentuk kendala-kendala tambahan yang menunjukkan sifat pengambil keputusan.
- *Expected value* tidak dianjurkan menjadi kriteria tunggal untuk pengambil keputusan. Ia hanya baik untuk digunakan sebagai petunjuk/pedoman, dan keputusan akhir haruslah diambil setelah mempertimbangkan semua faktor penting yang mempengaruhi sikap pengambil keputusan terhadap penggunaan (utilitas) uang.
- Nilai yang diharapkan (*expected value*) baru berarti bila kasus tersebut terjadi berulang-ulang dalam jumlah yang cukup besar.

Contoh:

Sebuah kebijakan mengenai perawatan preventif (*preventive maintenance policy*) memerlukan pengambilan keputusan mengenai kapan sebuah mesin harus diservis secara regular agar biaya kerusakan tiba-tiba dapat diminimumkan. Bila horison waktu dinyatakan dengan periode waktu yang sama, maka pengambilan keputusan diperlukan untuk menentukan jumlah periode yang optimal antara dua perawatan berturutan. Jika perawatan preventif dilakukan terlalu sering, biaya perawatan akan meningkat walaupun biaya kerusakan tiba-tiba akan menurun. Jadi, perlu ada kompromi antara kedua hal itu.

Oleh karena kita tidak mungkin mengetahui lebih dahulu kapan sebuah mesin akan rusak, maka kita perlu menghitung probabilitas bahwa sebuah mesin akan rusak dalam suatu periode t yang tertentu.

Misalkan:

- n =jumlah mesin
- T = periode
- p_t = Probabilitas sebuah mesin rusak pada periode t
- n_t = jumlah mesin yang rusak dalam periode t
- c_1 = biaya reparasi mesin yang rusak
- c_2 = biaya perawatan preventif per mesin

Pertanyaan adalah kapan T minimum?

Expected biaya per periode:

$$EC(T) = \frac{c_1 \sum_{t=1}^{T-1} E\{n_t\} + c_2 n}{T}$$

Dimana $E\{n_t\}$ adalah *expected* jumlah mesin yang rusak pada periode t.

Oleh karena n_t adalah variabel random binomial dengan parameter (n, p_t), maka $E\{n_t\} = np_t$

Jadi,

$$EC(T) = \frac{n(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2)}{T}$$

Kondisi yang diperlukan untuk menghitung T* agar EC(T) minimum adalah:

$$EC\ (T^*-1) \geq EC\ (T^*)$$

Jadi, dengan cara memulai dengan harga t yang kecil, komputasi EC(T) dilanjutkan hingga kondisi tersebut dicapai. Sebagai ilustrasi, misalkan c_1=\$100; c_2=\$10; dan n=50. Probabilitas mesin rusak pada waktu t adalah seperti pada tabel berikut:

T	P_T
1	0,05
2	0,07
3	0,10
4	0,13
5	0,18

Dengan demikian, harga P_t dapat dihitung seperti ditunjukkan pada tabel berikut:

T	P_T	$\sum_{t=1}^{T-1} P_t$	EC(T)
1	0,05	0	\$500
2	0,07	0,05	\$375
T* 3	0,10	0,12	\$366,7 EC(T*)
4	0,13	0,22	\$400
5	0,18	0,35	\$450

Dari hasil perhitungan, tabel menunjukkan bahwa pada kasus ini perawatan preventif sebaiknya dilakukan setiap 3 periode.

Kriteria *Expected Value - Variance*

- Kriteria expected value umumnya hanya cocok dipakai untuk keputusan-keputusan yang bersifat "jangka panjang (*long run*)".
- Kriteria tersebut dapat dimodifikasi untuk meningkatkan keterpakaiannya bagi masalah keputusan "jangka pendek (*short run*)"

Jika Z adalah variabel random dengan varian σ^2, maka rata-rata sampel Z akan mempunyai varians sebesar σ^2/n, dimana n adalah besarnya sampel. Jadi, jika σ^2 menjadi semakin kecil, maka varians juga akan menjadi semakin kecil dan probabilitas mendekati E{Z} menjadi semakin tinggi. Artinya, akan berguna apabila dibuat sebuah kriteria yang secara serentak akan memaksimumkan *expected profit* dan meminimumkan varians dari profit itu.

Kriteria yang mungkin dapat memenuhi tujuan ini adalah:

$$\text{Max } E\{Z\} - K \text{ var } \{Z\}$$

Dimana Z adalah variabel random yang menyatakan profit (laba), dan k adalah faktor melawan resiko (*risk aversion factor*).

K → menunjukkan derajat kepentingan var (Z) terhadap E{Z}.

Contoh:

Bila kriteria ini dipakai untuk kasus perawatan preventif sebelumnya, maka kita perlu menghitung varians dari biaya per periode

$$c_T = \frac{c_1 \sum_{t=1}^{r-1} n_t + nc_2}{T}$$

Karena n_t (t=1, …., t-1) adalah variabel random, maka c_t juga adalah variabel random. Oleh karena n_t adalah binomial dengan rata-rata (*mean*) np_t dan variansnya adalah $np_t(1-p_t)$, maka:

$$VAR\{C_T\} = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} VAR\{n_t\}$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t-1}^{T-1} nP_t(1 - P_t)$$

$$= n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t-1}^{T-1} P_t - \sum_{t-1}^{T-1} P_t{}^2\right\}$$

Karena E{C_1}=EC{T}, maka kriteria menjadi

Min EC(T) + K Var {C_t}

Untuk K=1, kriteria adalah

$$\min EC(T) + Var\,\{C_T\} = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{{C_1}^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} P_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} {P_t}^2 + \frac{C_2}{T}\right\}$$

Dengan data yang sama seperti pada contoh sebelumnya, kita peroleh hasil perhitungan seperti yang ditunjukkan tabel berikut:

T	P_T	P_T^2	$\sum_{t=1}^{T-1} P_T$	$\sum P_T^2$	EC(T)+var{C_T}
1	5	25	0	0	50000
2	7	49	5	25	631250
3	10	100	12	74	662222
4	13	169	22	174	673125
5	18	324	35	343	674600

T*

EC(T*)

Tabel menunjukkan bahwa T*=1, artinya perawatan preventif hendaknya dilakukan setiap periode.

Ternyata kriteria *expected varue-variance* ini lebih konservatif dibandingkan dengan kriteria *expected value* saja.

Kriteria Level Aspirasi

- Tidak dapat menghasilkan solusi optimal (maksimum laba atau minimum biaya), hanya tindakan yang dapat diterima.
- Contoh: Jual mobil bekas.

  Waktu menerima tawaran ia harus memutuskan apakah akan menerima atau tidak dalam jangka waktu tertentu.

  Penjual biasanya menetapkan harga terendah yang dapat diterimanya.

  → Level aspirasi → feeling

  Harga ini belum tentu optimal, karena bisa saja ada tawaran yang lebih tinggi setelah mobil itu laku. Jadi tidak ada probabilitas, ia hanya tahu kira-kira berapa harga pasar (distribusi harga pasar mobil bekas).

- Tetapi ini bukan termasuk defenisi probabilitas.
- Tanpa mengetahui distribusi pasar ia mungkin membuat level aspirasi terlalu tinggi (sehingga tidak ada yang mau membeli) atau terlalu rendah (rugi)
- Dengan level aspirasi tidak perlu menentukan probabilitas.
- Level aspirasi dapat dipakai bila tidak tersedia alternatif tindakan yang harus dilakukan.

Contoh:

Permintaan (*demand*) untuk suatu komoditas adalah x per periode ditentukan oleh f(x).

- Bila jumlah persediaan di awal periode tidak cukup → kekurangan.
- Bila jumlah persediaan di awal periode terlalu banyak → kelebihan

Kekurangan → kehilangan potensi laba dan konsumen

Kelebihan → biaya penyimpanan bertambah

Kuantitas taksiran kekurangan:

$$\int_{I}^{\infty} (x-1)f(x)dx \leq A_1$$

(*expected shortage*)

Kuantitas taksiran kelebihan:

$$\int_{0}^{I} (I-x)f(x)dx \leq A_2$$

Misalkan f(x) adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20}{x^2} \; untuk \; 10 \leq x \leq 20 \\ 0 \; untuk \; selainnya \end{cases}$$

Maka,

$$\int_{I}^{20} (x-I)f(x)dx = \int_{I}^{20} (x-I)\frac{20}{x^2}dx = 20\left\{ln\frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1\right\}$$

$$\int_{10}^{I} (I-x)f(x)dx = \int_{10}^{I} (I-x)\frac{20}{x^2}dx = 20\left\{ln\frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1\right\}$$

Kriteria level aspirasi dapat disederhanakan menjadi:

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq \ln 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1{,}996 - \frac{A_1}{20}$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq \ln 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1{,}302 - \frac{A_2}{20}$$

Level aspirasi A_1 dan A_2 haruslah sedemikian rupa sehingga kedua pertidaksamaan itu dapat dipenuhi paling tidak untuk satu harga I.

Sebagai contoh, jika A_1=2 dan A_2=4, maka:

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq 1{,}896$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq 1{,}102$$

Harga I hendaklah antara 10 dan 20 (batas dari *demand*), jadi:

Dari tabel ini terlihat bahwa harga I yang memenuhi adalah $13 \leq I \leq 17$, jadi level persediaan harus antara 13 dengan 17 saja.

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ln I-I/20	1,8	1,84	1,88	1,91	1,94	1,96	1,97	1,98	1,99	1,99	1,99
Ln I-I/10	1,3	1,29	1,28	1,26	1,24	1,21	1,98	1,13	1,09	1,04	0,99

Kriteria Most Likely Future

- Kriteria ini didasarkan pada konversi situasi probabilistik menjadi deterministik dengan cara menggantikan variabel random dengan sebuah besaran tunggal yang mempunyai probabilistik untuk menjadi tertinggi.
- Contoh:

Misalkan laba per unit dari produk ke-j adalah c_j dengan fungsi densitas probabilistik $p_j(c_j)$

Harga c_j* dapat dicari sehingga

$$P_j(c_j*) = \max (p_j c_j) \text{ untuk semua harga } j$$

Maka c_j* dapat dianggap sebagai besaran deterministik yang mewakili laba per unit untuk produk ke-j tersebut.

→Penyederhanaan dari masalah keputusan yang kompleks di bawah resiko.

- Hal ini dilakukan bukan sekedar untuk memudahkan analisis, tetapi terutama karena kita menyadari bahwa dari sudut pandang praktis, probabilitas paling tinggi itu menyediakan informasi yang cukup untuk mengambil keputusan.

Contoh:

Resiko pesawat terbang jatuh selalu ada, tetapi kebanyakan orang tetap naik pesawat terbang dengan asumsi penerbangan itu aman.

Namun, harus tetap hati-hati, terutama bila banyak besaran yang mempunyai probabilitas terjadi 0,05 atau kurang. Juga, bila beberapa harga variabel random muncul dengan probabilitas yang sama, untuk hal seperti ini, kriteria *most likely future* tidak cukup baik untuk dipakai.

Terima kasih