

# Teori & Model Antrian

Pertemuan 11

Dengan memperhatikan hal ini,  
banyak perusahaan mengusahakan  
untuk mengurangi waktu  
menunggu sebagai komponen utama  
dari perbaikan kualitas.





Umumnya, perusahaan dapat mengurangi waktu menunggu dan memberikan pelayanan yang lebih cepat dengan menambah jumlah pelayanan, seperti jumlah teller pada bank atau jumlah kasir pada supermarket.

- Teori Antrian
  - Ilmu pengetahuan tentang antrian
- Antrian
  - Orang-orang atau barang dalam barisan yang sedang menunggu untuk dilayani

<b>Situasi</b>	<b>Yang datang pada antrian</b>	<b>Proses Pelayanan</b>
Supermarket	Orang berbelanja	Membayar dikasir
Pintu tol	Mobil	Mengumpulkan uang
Praktek dokter	Pasien	Pelayanan dokter
Bank	Pelanggan	Transaksi oleh teller
Pelabuhan	Kapal	Pekerja bongkar muat

# Karakteristik Sistem Antrian

- Terdapat tiga komponen dalam sebuah sistem antrian:
  1. **Kedatangan atau masukan sistem.** Kedatangan memiliki karakteristik seperti ukuran populasi, perilaku, dan sebuah distribusi statistik.
  2. **Disiplin antrian**, atau antrian itu sendiri. Karakteristik antrian mencakup apakah jumlah antrian terbatas atau tidak terbatas panjangnya dan materi atau orang-orang yang ada di dalamnya.
  3. **Fasilitas pelayanan.** Karakteristiknya meliputi desain dan distribusi statistik waktu pelayanan.

# Karakteristik Kedatangan

- Sumber input yang menghadirkan kedatangan pelanggan bagi sebuah sistem pelayanan memiliki tiga karakteristik utama:
  1. *Ukuran* populasi kedatangan.
  2. *Perilaku* kedatangan.
  3. *Pola* kedatangan (distribusi statistik).

# Karakteristik Kedatangan

- Ukuran Populasi Kedatangan
  - Tak terbatas
  - Terbatas
- Perilaku kedatangan
  - Tidak sabar
  - Yang sabar hanya mesin

# Karakteristik Kedatangan

- Pola kedatangan pada sistem
  - Terjadwal
  - Secara acak → distribusi Poisson

$$P(x) = \lambda^x \cdot \frac{e^{-\lambda}}{x!}$$

$P(x)$  = probabilitas kedatangan  $x$   
 $x$  = Jumlah kedatangan persatuan waktu  
 $\lambda$  = Tingkat kedatangan rata-rata  
 $e$  = 2,7183 (dasar logaritma)

# Mengukur Kinerja Antrian

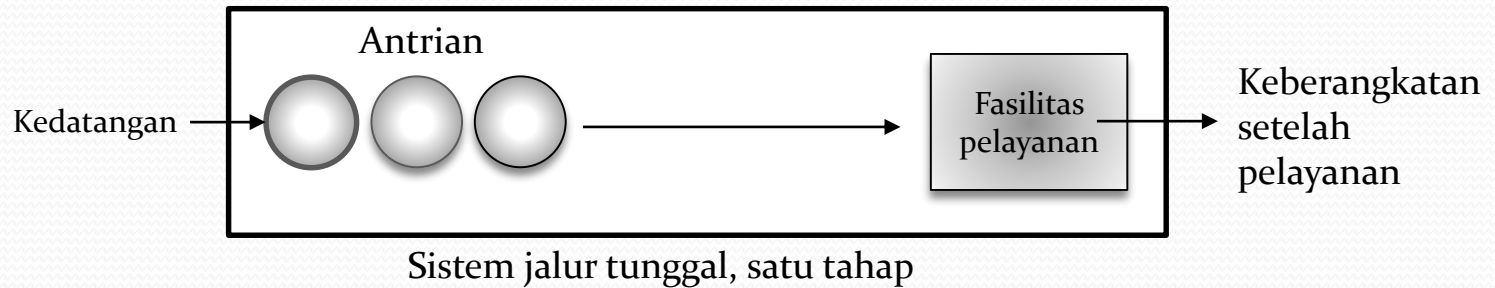
- Model antrian membantu para manajer membuat keputusan untuk menyeimbangkan biaya pelayanan dengan menggunakan biaya antrian. Dengan menganalisis antrian akan dapat diperoleh banyak ukuran kinerja sebuah sistem antrian, meliputi hal berikut:
  1. Waktu rata-rata yang dihabiskan oleh pelanggan dalam antrian.
  2. Panjang antrian rata-rata
  3. Waktu rata-rata yang dihabiskan oleh pelanggan dalam sistem (waktu tunggu ditambah waktu pelayanan).
  4. Jumlah pelanggan rata-rata dalam sistem.
  5. Probabilitas fasilitas pelayanan akan kosong.
  6. Faktor utilisasi sistem.
  7. Probabilitas sejumlah pelanggan berada dalam sistem.

- Bagaimana pelanggan diseleksi dari antrian untuk dilayani?
  - First Come First Served (FCFS)/FIFO
  - Shortest Processing Time (SPT)
  - Priority (jobs are in different priority classes)
- Untuk kebanyakan model diasumsikan FCFS

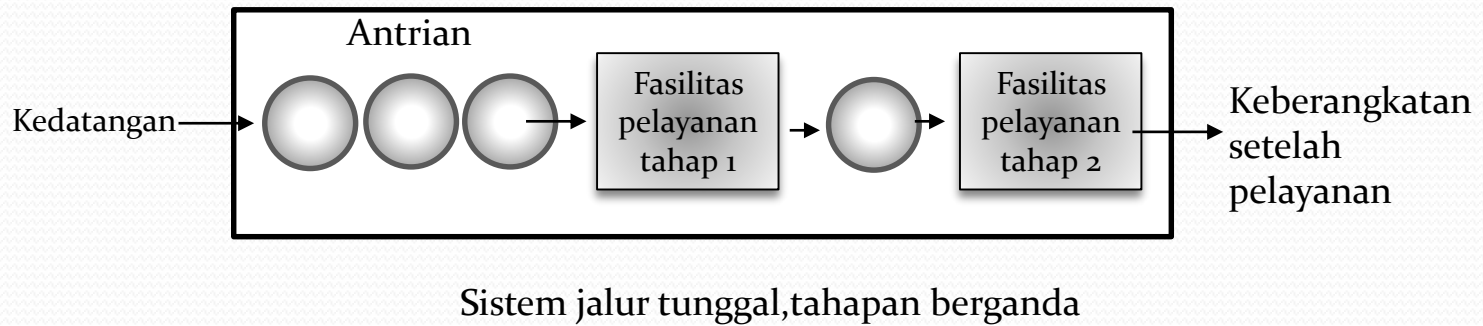
# Desain Sistem Antrian Dasar

## Contoh

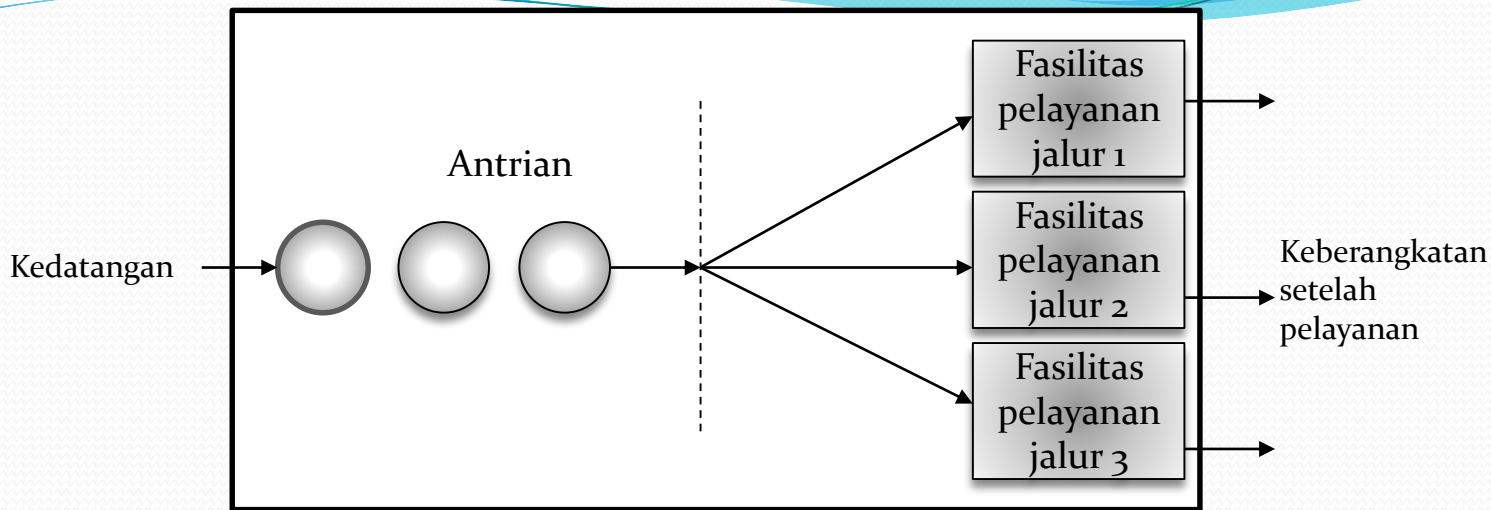
Kantor praktik dokter gigi keluarga



Dua jendela kendaraan-lewat (drive-through) di McDonald

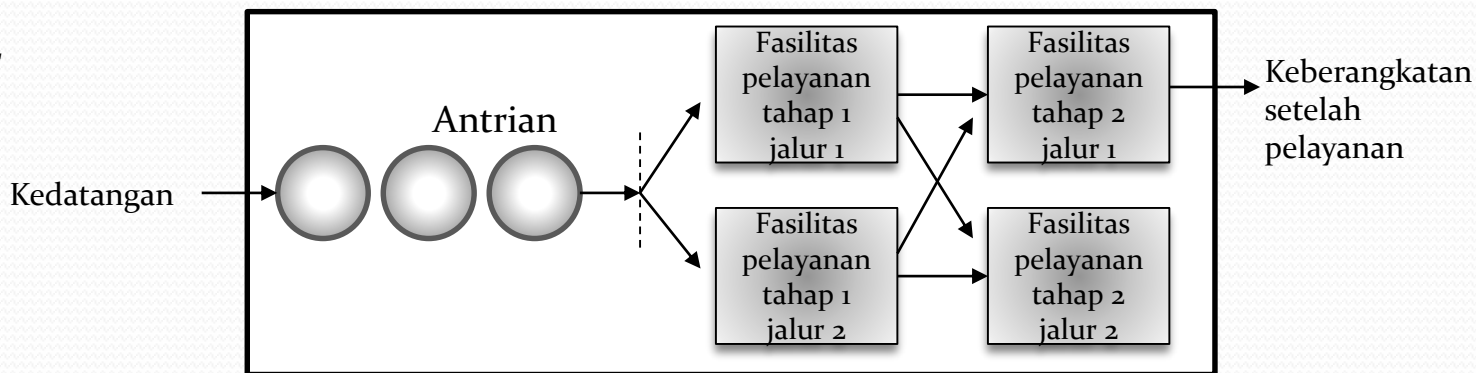


Hampir seluruh bank dan kantor pos



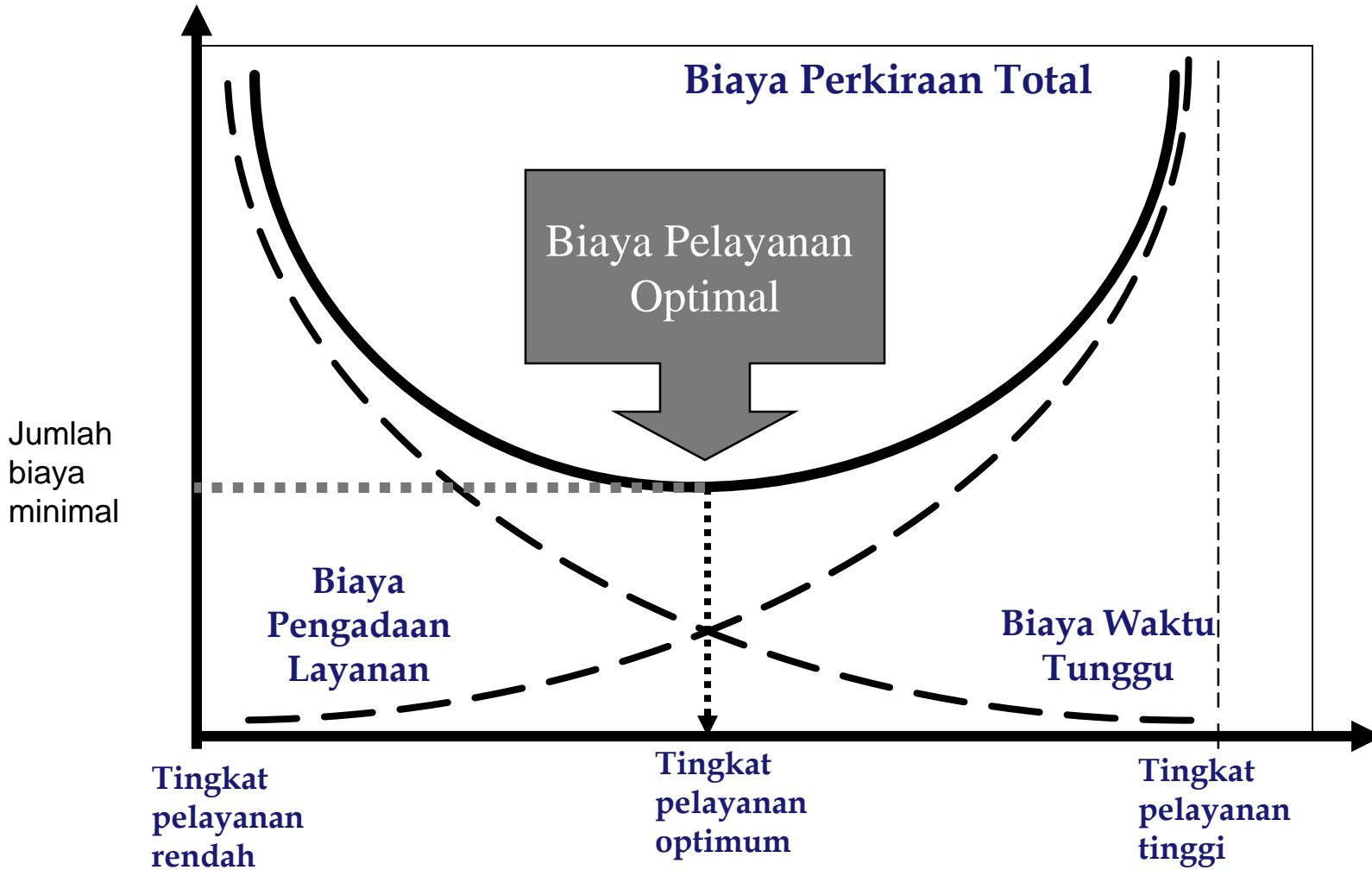
Sistem jalur berganda, satu tahap

Beberapa kantor pendaftaran mahasiswa



Sistem jalur berganda, tahapan berganda

# BIAYA SISTEM ANTRIAN



# Model Antrian

## 1. Model Antrian Jalur Tunggal (M/M/1)

- Meja informasi/CS di Bank

## 2. Model Antrian Jalur Ganda (M/M/s)

- Loket tiket penerbangan

## 3. Model Waktu Pelayanan Konstan (M/D/1)

- Pencucian mobil otomatis

## 4. Model Populasi Terbatas

- Bengkel yang memiliki hanya selusin mesin yang rusak

## Model A : M/M/1

# Model Antrian Jalur Tunggal dengan Kedatangan Berdistribusi Poisson dan Waktu Pelayanan Eksponensial

1. Kedatangan dilayani atas dasar *first-in, first-out* (FIFO), dan setiap kedatangan menunggu untuk dilayani, terlepas dari panjang antrian.
2. Kedatangan tidak terikat pada kedatangan yang sebelumnya, hanya saja jumlah kedatangan rata-rata tidak berubah menurut waktu.
3. Kedatangan digambarkan dengan distribusi probabilitas poisson dan datang dari sebuah populasi yang tidak terbatas (atau sangat besar).
4. Waktu pelayanan bervariasi dari satu pelanggan dengan pelanggan yang berikutnya dan tidak terikat satu sama lain, tetapi tingkat rata-rata waktu pelayanan diketahui.
5. Waktu pelayanan sesuai dengan distribusi probabilitas eksponensial negatif.
6. Tingkat pelayanan lebih cepat daripada tingkat kedatangan.

- $\lambda$  = jumlah kedatangan rata-rata persatuan waktu
- $\mu$  = jumlah orang yang dilayani persatuan waktu
- Panjang antrian tak terbatas
- Jumlah pelanggan tak terbatas

Probabilitas tidak adanya pelanggan dalam suatu sistem antrian (baik sedang dalam antrian maupun sedang dilayani)	$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
Probabilitas terdapat n pelanggan dalam suatu sistem antrian	$P_n = \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n \cdot P_0$
Rata-rata jumlah pelanggan dalam suatu sistem antrian (yang menunggu untuk dilayani)	$L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$
Rata-rata jumlah pelanggan yang berada dalam baris antrian	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
Waktu rata-rata dihabiskan seorang pelanggan dalam keseluruhan sistem antrian (yaitu, waktu menunggu dan dilayani)	$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$

Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan untuk menunggu dalam antrian sampai dilayani	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
Probabilitas bahwa pelayan sedang sibuk (yaitu, probabilitas seorang pelanggan harus menunggu), dikenal dengan faktor utilisasi	$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$
Probabilitas bahwa pelayan menganggur / unit pelayanan kosong	$I = 1 - U = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = P_0$

# Contoh 1

- Seorang montir di bengkel dpt memasang sebuah knalpot dengan waktu 20 menit per jam yang mengikuti distribusi eksponensial. Pelanggan tiba rata-rata 2 mobil perjam dengan distribusi poisson. Mereka dilayani dengan aturan FIFO dan datang dari populasi yang sangat besar (tak terbatas)

- $\lambda = 2$  mobil tiba per jam

- $\mu = 3$  mobil dilayani per jam

- $L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$        $L = \frac{2}{(3 - 2)} = \frac{2}{1}$       = 2 mobil rata-rata dlm sistem

- $$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

$$W = \frac{1}{3 - 2} = 1$$

1 jam rata-rata waktu menunggu dlm sistem
- $$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L_q = \frac{2^2}{3(3 - 2)} = \frac{4}{3}$$

1,33 mobil rata-rata menunggu dlm antrian
- $$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = \frac{2}{3(3 - 2)} = \frac{2}{3}$$

40 menit waktu tunggu rata-rata mobil
- $$P_n = \left[ \frac{\lambda}{\mu} \right]^n \cdot P_0$$

$$P = \left[ \frac{2}{3} \right]$$

66,6% montir sibuk
- $$I = 1 - U = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = P_0$$

$$1 - \frac{2}{3} = 1/3 = 0,33$$

0.33 probabilitas 0 mobil dlm sistem

# Biaya Yang terlibat

- Jika waktu tunggu pelanggan adalah \$10/jam berapa biaya waktu tunggu perhari (8 jam kerja, 2 mobil tiba perjam)?

$$W_q = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$$

Waktu tunggu rata-rata mobil  $\frac{2}{3}$  jam = 40 menit

Banyaknya mobil = 16

Total waktu menunggu =  $16 \times \frac{2}{3}$  jam =  $10 \frac{2}{3}$  jam

Biaya waktu menunggu =  $10 \frac{2}{3}$  jam X \$10 = \$107/hari

# Model Antrian Jalur Ganda

M/M/S

Berikut ini disajikan formula antrian untuk sistem pelayanan multiple. Formula ini dikembangkan berdasarkan asumsi :

- Disiplin antrian pertama datang pertama dilayani (FIFO)
- Kedatangan Poisson
- Waktu pelayanan eksponensial
- Populasi yang tidak terbatas

Parameter model pelayanan multiple adalah sebagai berikut

$\lambda$  = tingkat kedatangan

$\mu$  = tingkat pelayanan

$c$  = jumlah pelayan

$c\mu$  = rata-rata pelayanan efektif sistem tersebut, dimana nilainya harus melebihi tingkat kedatangan ( $c\mu > \lambda$ )

Probabilitas tidak adanya pelanggan dalam sistem tersebut	$P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{n=c-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left( \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right)}$
Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem antrian tersebut	$P_n = \frac{1}{c!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-c} P_0, \text{ untuk } n > c; P_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, \text{ untuk } n \leq c$
Jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem antrian tersebut	$L = \frac{\lambda \mu (\lambda / \mu)^c}{(c-1)! (c\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$
Waktu rata-rata yang dihabiskan pelanggan dalam sistem antrian tersebut	$W = \frac{L}{\lambda}$

Jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian tersebut	$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$
Waktu rata-rata yang dihabiskan pelanggan dalam antrian menunggu untuk dilayani	$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$
Probabilitas seorang pelanggan yang datang dalam sistem tersebut harus menunggu untuk dilayani	$P_w = \frac{1}{c!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} P_0$

Dalam formula di atas jika  $c=1$  (yaitu, terdapat satu pelayan), maka formula tersebut menjadi formula pelayanan tunggal.

Contoh berikut ini mengilustrasikan analisis sistem antrian pelayanan tunggal dan pelayanan multipel, termasuk penentuan karakteristik operasi untuk tiap-tiap sistem.

### Kasus

Petugas baru untuk pelayanan pinjaman pada Bank BCD mewawancarai seluruh nasabah yang ingin membuka rekening pinjaman baru. Tingkat kedatangan para nasabah tersebut adalah **4 nasabah per jam** berdasarkan distribusi Poisson, dan petugas rekening tersebut menghabiskan waktu rata-rata **12 menit** untuk setiap nasabah yang ingin membuka rekening baru.

- A. Tentukan karakteristik operasi ( $P_0$ ,  $L$ ,  $L_q$ ,  $W$ ,  $W_q$ , dan  $P_w$ ) untuk sistem ini.
- B. Tambahkan seorang petugas baru pada sistem atas masalah tersebut sehingga sekarang sistem tersebut menjadi sistem antrian pelayanan multiple dengan dua saluran dan tentukan karakteristik operasi yang diminta pada bagian A

A. Karakteristik Operasi untuk sistem pelayanan tunggal

$\lambda = 4$  nasabah per jam kedatangan

$\mu = 5$  nasabah per jam yang dilayani

Probabilitas tidak adanya nasabah dalam sistem

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) = 0.20$$

Jumlah nasabah rata-rata dalam sistem antrian

$$L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{4}{(5 - 4)} = 4$$

Jumlah nasabah rata-rata dalam baris antrian

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4^2}{5(5 - 4)} = 3.2$$

### A. Karakteristik Operasi untuk sistem pelayanan tunggal

Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan dalam keseluruhan sistem antrian

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{5 - 4} = 1 \text{ jam}$$

Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan untuk menunggu dalam antrian sampai dilayani

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{5(5 - 4)} = 0.8 \text{ jam} = 48 \text{ menit}$$

Probabilitas petugas rekening baru akan sibuk dan nasabah harus menunggu

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5} = 0.8$$

B. Karakteristik Operasi untuk sistem pelayanan multipel

$\lambda = 4$  nasabah per jam kedatangan

$\mu = 5$  nasabah per jam yang dilayani

$c = 2$  petugas yang datang

Probabilitas tidak adanya nasabah dalam sistem

$$P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left( \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right)}$$
$$= \frac{1}{\left[ \frac{1}{0!} \left( \frac{4}{5} \right)^0 + \frac{1}{1!} \left( \frac{4}{5} \right)^1 \right] + \frac{1}{2!} \left( \frac{4}{5} \right)^2 \left( \frac{2.5}{2.5 - 4} \right)}$$
$$= 0.429$$

Jumlah nasabah rata-rata dalam sistem antrian

$$L = \frac{\lambda \mu (\lambda / \mu)^c}{(c-1)! (c\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$
$$= \frac{4.5 (4/5)^2}{1! (2.5 - 4)^2} 0.429 + \frac{4}{5}$$
$$= 0.952$$

## B. Karakteristik Operasi untuk sistem pelayanan multipel

Jumlah nasabah rata-rata dalam baris antrian

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.952 - \frac{4}{5} = 0.152$$

Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan dalam keseluruhan sistem antrian

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{0.952}{4} = 0.238 \text{ jam}$$

Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan untuk menunggu dalam antrian sampai dilayani

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.152}{4} = 0.038 \text{ jam}$$

Probabilitas petugas rekening baru akan sibuk dan nasabah harus menunggu

$$P_w = \frac{1}{c!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} P_0 = \frac{1}{2!} \left( \frac{4}{5} \right)^2 \frac{2.5}{2.5 - 4} 0.429 = 0.229$$

	Satu Petugas	Dua Petugas
$P_0$	0,20	0,429
$L$	4	0,952
$W_0$	1	0,238 = 14,28 menit
$L_q$	3.2	0,152
$W_q$	0,8 = 48 menit	0,038 = 2.28 menit
$P_q$	0,8	0,229

- $P_0$  = probabilitas tidak ada pelanggan dlm sistem
- $L$  = jumlah nasabah rata-rata dlm sistem antrian
- $W_0$  = waktu yg dihabiskan pelanggan dlm antrian
- $L_q$  = Jumlah nasabah dlm baris antrian
- $W_q$  = Waktu yg dihabiskan utk menunggu dilayani
- $P_q$  = Probabilitas petugas sibuk dan nasabah menunggu

# Soal Latihan 1

- Terdapat satu mesin fotocopy pada sekolah bisnis. Mahasiswa datang dengan tingkat  $\lambda = 40$  perjam (distribusi poisson). Proses fotocopy rata-rata 40 detik atau  $\mu = 90$  perjam (distribusi eksponensial). Hitung :
  1. Persentase waktu mesin digunakan
  2. Panjang antrian rata-rata
  3. Jumlah mahasiswa dalam sistem rata-rata
  4. Waktu yang dihabiskan untuk menunggu dalam antrian rata-rata
  5. Waktu yang dihabiskan dalam sistem rata-rata

# Soal Latihan 2

- Sebuah distributor batu bata punya satu pekerja yang memuat batu bata ke dalam truk. Rata-rata 24 truk datang tiap hari kerja (8 jam). Dengan pola kedatangan distribusi poisson, pekerja memuat batu bata ke atas 4 truk tiap jam, waktu pelayanan distribusi exponential. Pengusaha ingin menambah satu petugas lagi untuk dapat memuat batu bata ke atas 8 truk perjam.
  1. Buat analisa karakteristik sistem jalur tunggal dan ganda
  2. Upah sopir truk \$10 perjam, upah petugas pemuat bata \$6 perjam. Berapa penghematan jika punya 2 petugas pemuat batu bata

### 3. Model Waktu Pelayanan Konstan

- Beberapa pelayanan memiliki waktu pelayanan yang tetap, misalnya :
  - Pencucian mobil otomatis
  - Wahana di taman hiburan
  - Dikenal sebagai  $M/D/1$

# Asumsi Pelayanan Konstan

- Laju kedatangan (distribusi Poisson)
- Waktu pelayanan konstan
- Server tunggal
- First-come-first-served (FCFS)/FIFO
- Panjang antrian tak terbatas
- Jumlah pelanggan tak terbatas

Faktor Utilitas

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Waktu tunggu rata-rata dalam antrian

$$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Panjang Antrian Rata-rata

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Jumlah pelanggan dalam sistem rata-rata

$$L_s = L_q + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

## 4. Model Antrian Populasi Terbatas

- Terjadi ketika sebuah populasi pelanggan potensial yang terbatas bagi sebuah fasilitas pelayanan, contoh :
  - Perbaikan mesin pabrik yang memiliki 5 mesin
  - Armada yg terdiri dari 10 pesawat terbang
  - Rumah sakit yang punya 100 tempat tidur
- Berbeda dengan 3 model antrian sebelumnya, jika pada kondisi ekstrim, misalnya 5 mesin rusak, maka pelanggan akan sama dengan 0

- Faktor pelayanan

$$X = \frac{T}{T+U}$$

- Jumlah antrian rata-rata

$$L = N (1 - F)$$

- Waktu tunggu rata-rata

$$W = \frac{L(T+U)}{N-L} = \frac{T(1-F)}{XF}$$

- Jumlah pelayanan rata-rata

$$J = NF(1 - X)$$

- Jumlah dalam pelayanan Rata-rata

$$H = FNX$$

- Jumlah Populasi

$$N = J + L + H$$

# Tabel Antrian dengan $N=5$

D = probabilitas sebuah unit harus menunggu dalam antrian

F = faktor efisiensi

H = rata-rata jumlah unit yg sedang dilayani

J = rata-rata jumlah unit tidak berada dlm antrian

L = rata-rata jumlah unit yg menunggu untuk dilayani

M = jumlah jalur pelayanan

N = jumlah pelanggan potensial

T = waktu pelayanan rata-rata

U = waktu rata-rata antara unit yg membutuhkan pelayanan

W = waktu rata-rata sebuah unit menunggu dalam antrian

X = faktor pelayanan

## Contoh Soal 3

- Sebuah perusahaan penghancur sampah kaleng mampu menerima sampah yang dikirim menggunakan truk. Waktu tunggu truk saat ini adalah 15 menit sebelum dapat dikosongkan. Biaya pengemudi selama menunggu adalah \$60 perjam. Jika beli mesin penghancur baru dapat memuat 12 truk perjam. Truk datang dengan distribusi poisson rata-rata 8 kedatangan perjam. Jika beli alat baru depresiasi adalah \$3 untuk setiap truk yang datang. Hitung kemungkinan membeli mesin baru.

# Contoh Soal 4

Sebuah kantor dg 5 mesin laser perlu perbaikan setelah 20 jam kerja. Kerusakan mesin mengikuti distribusi poisson. Seorang teknisi dpt memperbaiki mesin selama rata-rata 2 jam mengikuti distribusi exponensial. Biaya kerusakan mesin \$120 perjam. Teknisi dibayar \$25 perjam. Apakah kantor tsb perlu teknisi kedua?

**SEKIAN**